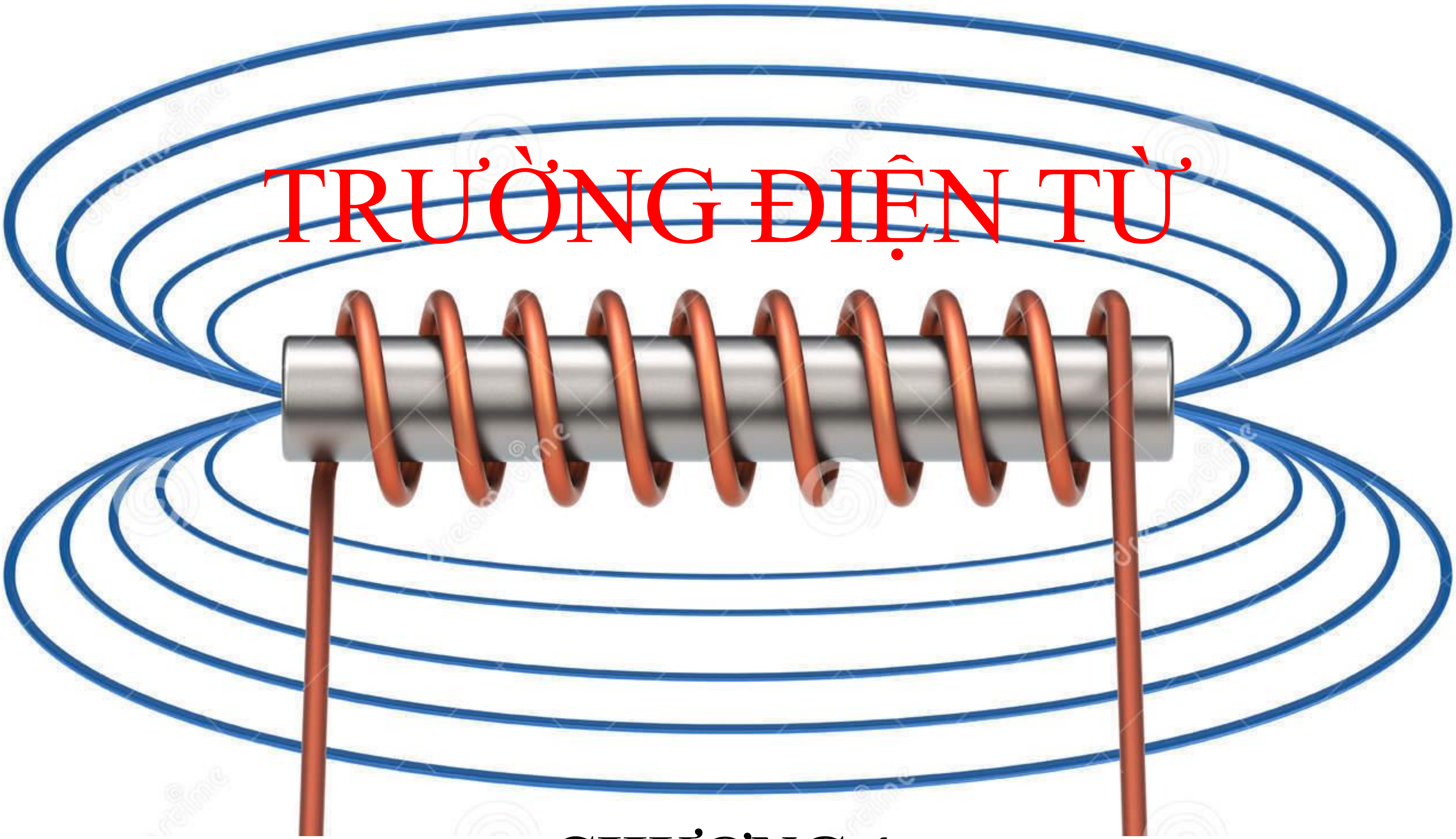
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ



CHƯƠNG 1

CÁC KHÁI NIỆM VÀ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

CHƯƠNG 1

– Giải tích vectơ.
– Khái niệm cơ bản.
– Các đại lượng đặc trưng của trường điện từ
– Các định luật cơ bản của trường điện từ
– Dòng điện dịch- Hệ phương trình Maxwell
– Điều kiện biên
– Năng lượng điện từ- Định lý Poynting

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.1 Đại số vector

a) Vector ($\vec{A}$) và Vô hướng (A):

- Vector: Đại lượng vật lý, đặc trưng bởi cả độ lớn và hướng trong không gian.
  - Ví dụ: Vận tốc,lực …
- Vô hướng: Đại lượng vật lý, đặc trưng chỉ bởi độ lớn.
  - Ví dụ: Khối lượng, điện tích …

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

b) Vector đơn vị:

- độ lớn là 1, hướng theo chiều tăng các trục tọa độ, ký hiệu $\vec{a}$ và các chỉ số :

$$\left\{\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3\right\}$$

- Một vector bất kỳ có thể biểu diễn theo các vector đơn vị như sau:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z = E_x(x,y,z,t)\vec{a}_x + E_y(x,y,z,t)\vec{a}_y + E_z(x,y,z,t)\vec{a}_z$$

- Vector đơn vị dọc theo một vector:

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_1\vec{a}_1 + A_2\vec{a}_2 + A_3\vec{a}_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

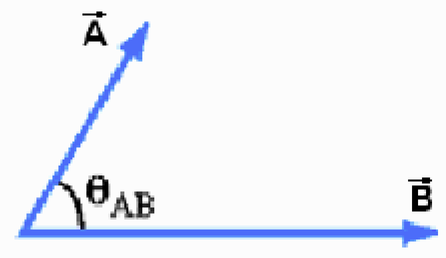
1. GIẢI TÍCH VECTƠ

c) Tích vô hướng:

- **Là một vô hướng:**

$$\vec{A}.\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \mathrm{A.B.}\cos\theta_{AB}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = \mathrm{A}^2$$



- **Rất thuận tiên khi tìm góc giữa 2 vector:**

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left((\vec{\mathrm{A}}.\vec{\mathrm{B}}) \big/ (\mathrm{A.B}) \right)$$

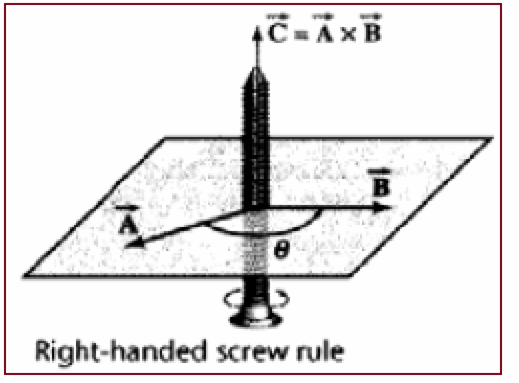
1. GIẢI TÍCH VECTƠ

d) Tích có hướng:

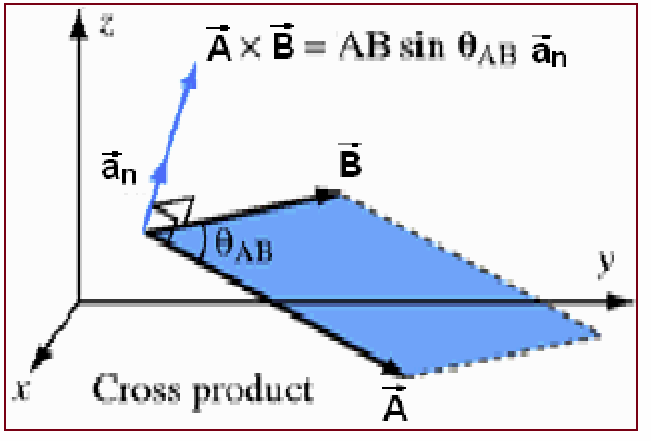
- Là một vector, vuông góc với cả hai vector $\vec{A}$ và $\vec{B}$

$$\vec{A}\times\vec{A}=0$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=-\vec{B}\times\vec{A}$$



- Rất tiện lợi để tìm vector đơn vị vuông góc với mặt phẳng chứa 2 vector:



$$\vec{a}_n=\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

Cho 3 vector: $\vec{A} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$

$\vec{B} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$

$\vec{C} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$

---

a) Tính: $\vec{A} + \vec{B} - 4\vec{C}$?

$$= (3+1-4)\vec{a}_1 + (2+1-8)\vec{a}_2 + (1-1-12)\vec{a}_3$$

$$= -5\vec{a}_2 - 12\vec{a}_3$$

$$\Rightarrow \left|\vec{A} + \vec{B} - 4\vec{C}\right| = \sqrt{25+144} = 13$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

b) **Tính:** $\vec{A} + 2\vec{B} - \vec{C}$?

$$= (3+2-1)\vec{a}_1 + (2+2-2)\vec{a}_2 + (1-2+3)\vec{a}_3$$

$$= 4\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$$

Vector đơn vị $= \dfrac{4\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3}{\left|4\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3\right|}$

$$= \frac{1}{3}\left(2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3\right)$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

Cho 3 vector: $\vec{A} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$

$\vec{B} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$

$\vec{C} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$

c) Tính: $\vec{A}.\vec{C} = (3*1) + (2*2) + (1*3) = 10$

d) Xác định: $\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 + \vec{a}_3$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

Cho 2 vector: $\vec{A} = 3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y - \vec{a}_z$ $\vec{B} = \vec{a}_x - 3\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$

a) Tính: $\vec{C} = 2\vec{A} - 3\vec{B}$

b) Xác định vector đơn vị $\vec{a}_C$ và góc hợp bởi nó với trục Oz ?

a) Ta có: $\vec{\mathbf{C}} = 2\vec{\mathbf{A}} - 3\vec{\mathbf{B}} = 2[3\vec{\mathbf{a}}_x + 2\vec{\mathbf{a}}_y - \vec{\mathbf{a}}_z] - 3[\vec{\mathbf{a}}_x - 3\vec{\mathbf{a}}_y + 2\vec{\mathbf{a}}_z]$

$$= 3\vec{\mathbf{a}}_x + 13\vec{\mathbf{a}}_y - 8\vec{\mathbf{a}}_z$$

$$\Rightarrow \quad C = \sqrt{3^2 + 13^2 + (-8)^2} = 15.556$$

b) Vector đơn vị : $\vec{\mathbf{a}}_c = \dfrac{\vec{\mathbf{C}}}{C} = 0.193\vec{\mathbf{a}}_x + 0.836\vec{\mathbf{a}}_y - 0.514\vec{\mathbf{a}}_z$

$$\Rightarrow \quad \theta_z = \cos^{-1}\left[\frac{C_z}{C}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{-8}{15.556}\right] = 120.95^\circ$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.2 Các hệ tọa độ

1.2.1 Hệ tọa độ Descartes

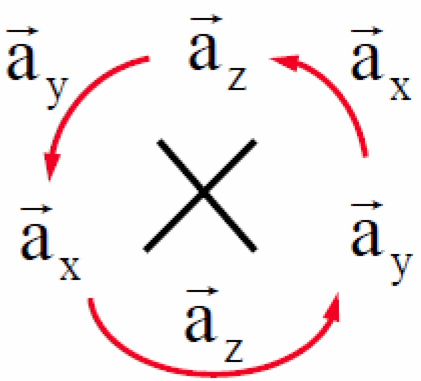
a) **Các vector đơn vị:**

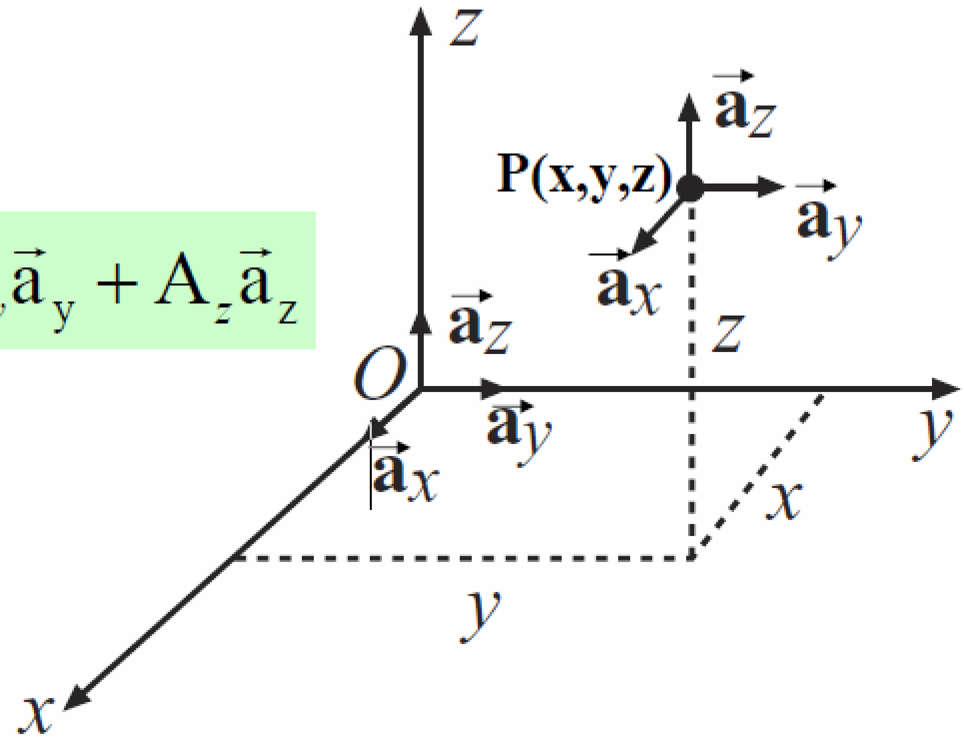
* $P(x, y, z)$

* $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$

$$\Rightarrow \vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$$

* **Luật bàn tay phải :**





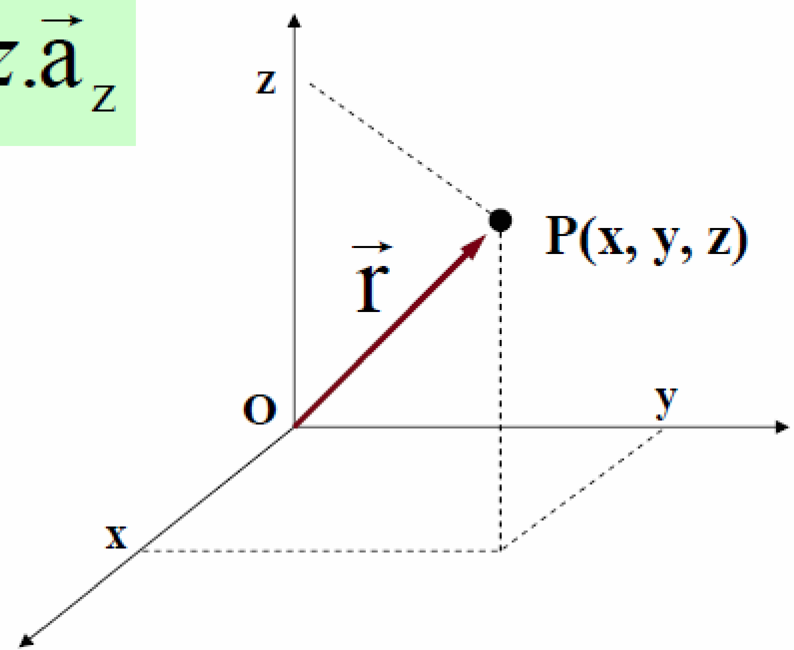
1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.2 Các hệ tọa độ

1.2.1 Hệ tọa độ Descartes

b) Vector vị trí:

$$\vec{r} = x.\vec{a}_x + y.\vec{a}_y + z.\vec{a}_z$$

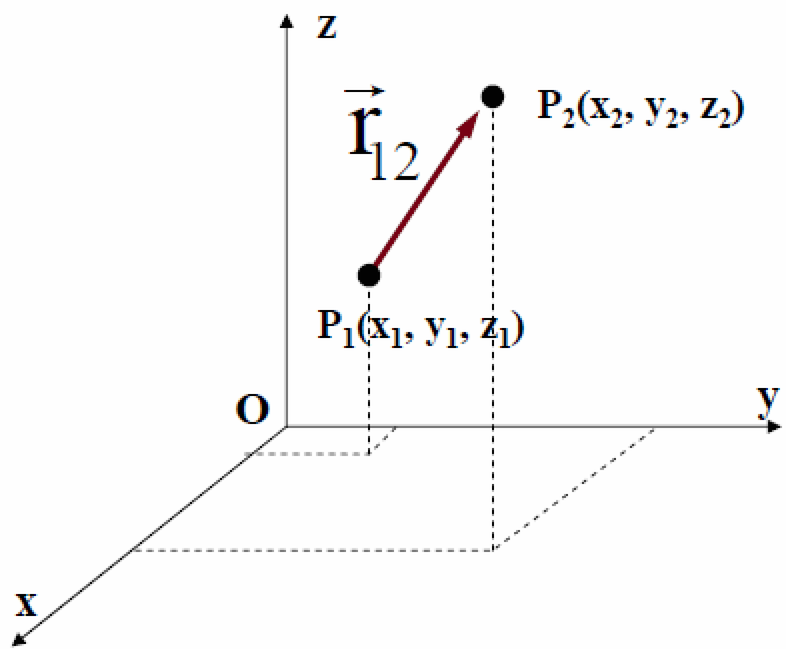


1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.2 Các hệ tọa độ

1.2.1 Hệ tọa độ Descartes

c) Vector từ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ đến $P_2(x_2,y_2,z_2)$:



$$\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1)\vec{a}_x + (y_2 - y_1)\vec{a}_y + (z_2 - z_1)\vec{a}_z$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.2 Các hệ tọa độ

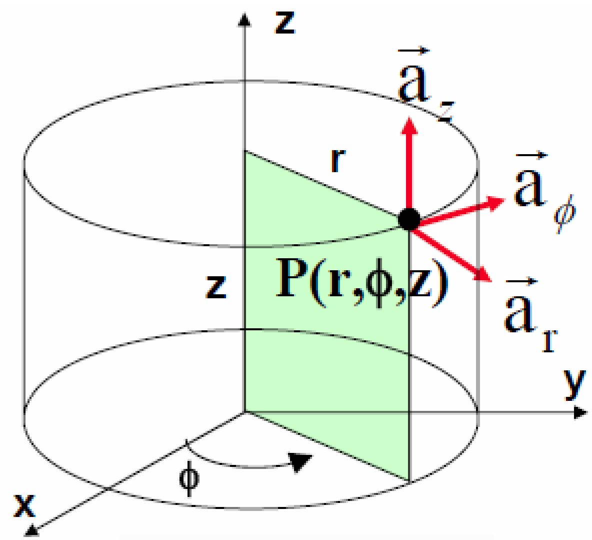
1.2.2 Hệ tọa độ trụ

$$\vec{R} = r\vec{i_r} + z\vec{i_z}$$

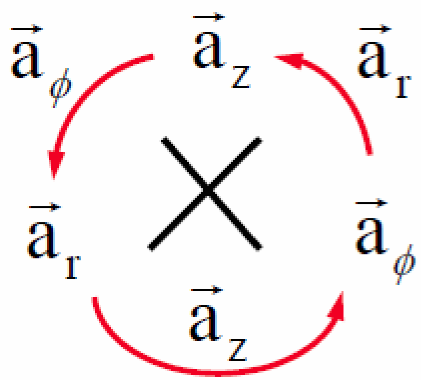
* $P(r, \phi, z)$

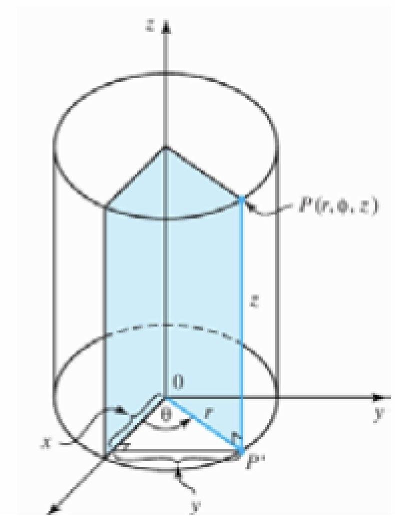
* $\{\vec{a}_r, \vec{a}_\phi, \vec{a}_z\}$

$\Rightarrow$ $\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\phi\vec{a}_\phi + A_z\vec{a}_z$



* **Luật bàn tay phải :**





1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.2 Các hệ tọa độ

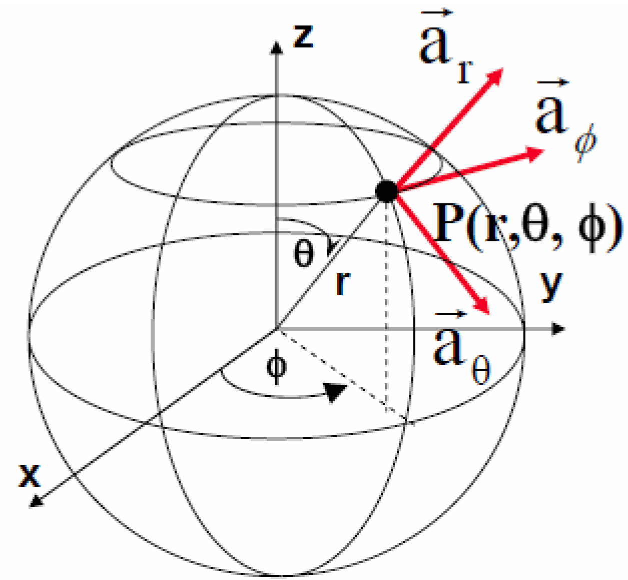
1.2.3 Hệ tọa độ cầu

$$\vec{R} = r\,\vec{i_r}$$

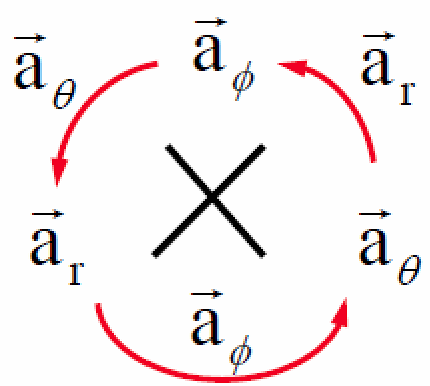
* $P(r, \theta, \phi)$

* $\left\{\vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\phi\right\}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\theta\vec{a}_\theta + A_\phi\vec{a}_\phi}$$

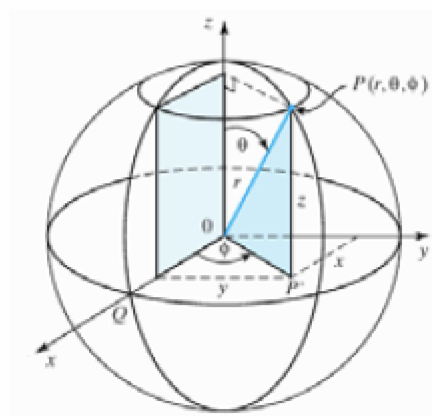


* **Luật bàn tay phải :**



❖**Chú ý:**

- **<u>Hệ trụ:</u>** $\left\{\vec{a}_{rc}\right\}$
- **<u>Hệ cầu:</u>** $\left\{\vec{a}_{rs}\right\}$



1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.2 Các hệ tọa độ

1.2.4 Chuyển đổi giữa các hệ tọa độ

Đề các **Trụ**

$$(x, y, z) \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = tg^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{array}\right\} \longleftarrow (r, \phi, z)$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.2 Các hệ tọa độ

1.2.4 Chuyển đổi giữa các hệ tọa độ

Đề các → **Cầu**

$$(x, y, z) \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = tg^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi = tg^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \leftarrow (r, \theta, \phi)$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.2 Các hệ tọa độ

1.2.5 Chuyển đổi vector giữa các hệ tọa độ

Đề các $\longleftrightarrow$ **Trụ**

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.2 Các hệ tọa độ

1.2.5 Chuyển đổi vector giữa các hệ tọa độ

-

Đề các ⟷ Cầu

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ -\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân

a) Công thức chung:

$$d\vec{l} = h_1 du_1 \vec{a}_1 + h_2 du_2 \vec{a}_2 + h_3 du_3 \vec{a}_3$$

$$d\vec{S} = d\vec{S}_1 + d\vec{S}_2 + d\vec{S}_3 = \pm dS_1 \vec{a}_1 \pm dS_2 \vec{a}_2 \pm dS_3 \vec{a}_3$$

$$= \pm h_2 h_3 du_2 du_3 \vec{a}_1 \pm h_1 h_3 du_1 du_3 \vec{a}_2 \pm h_1 h_2 du_1 du_2 \vec{a}_3$$

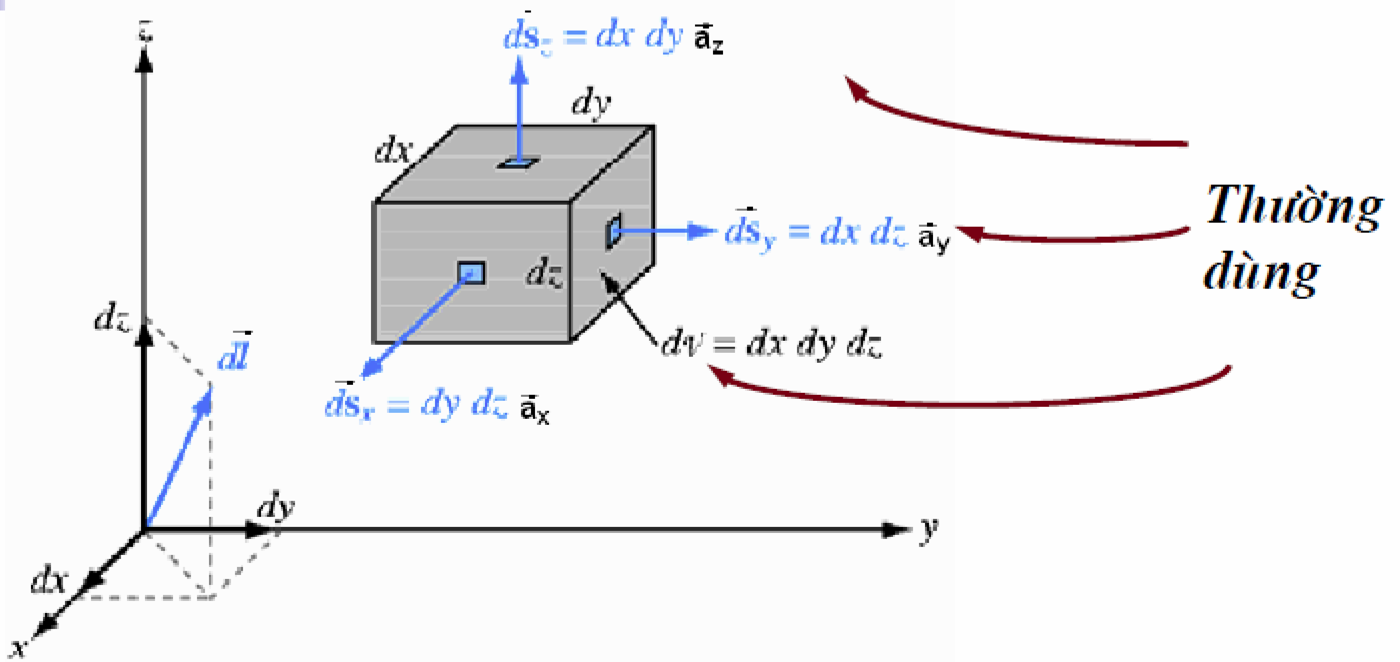
$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

Hệ số tọa độ (Larmor)	h_1	h_2	h_3
Đề các :	1	1	1
Trụ :	1	r	1
Cầu:	1	r	$r\sin\theta$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân

b) Yếu tố vi phân ở hệ tọa độ Đề các :

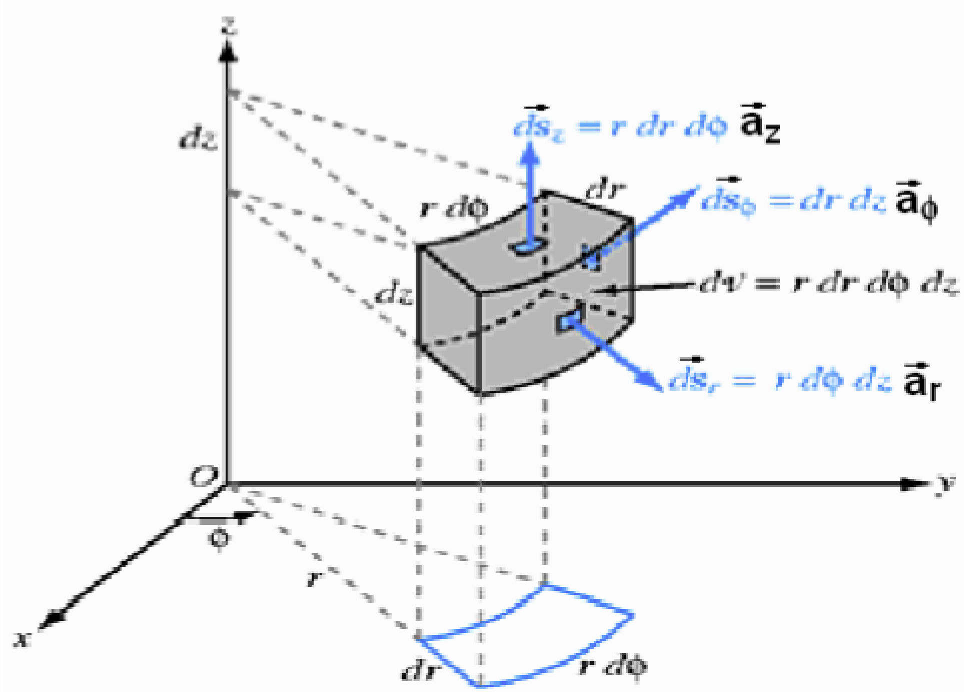


$d\vec{l} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$
$d\vec{S} = \pm dydz\,\vec{a}_x \pm dxdz\,\vec{a}_y \pm dxdy\,\vec{a}_z$
$dV = dxdydz$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân

c) Yếu tố vi phân ở hệ tọa độ trụ :

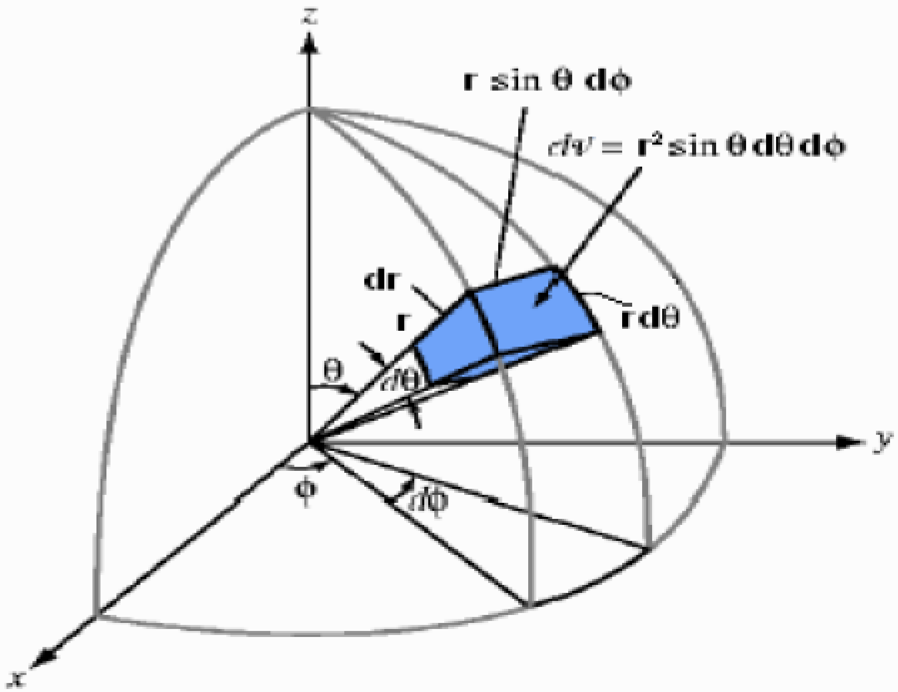


$d\vec{l} = dr\,\vec{a}_r + rd\phi\,\vec{a}_\phi + dz\,\vec{a}_z$
$d\vec{S} = \pm rd\phi dz\,\vec{a}_r \ \pm\ drdz\,\vec{a}_\phi \ \pm\ rdrd\phi\,\vec{a}_z$
$dV = rdrd\phi dz$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân

d) Yếu tố vi phân ở hệ tọa độ cầu :



$d\vec{l} = dr\,\vec{a}_r + rd\theta\,\vec{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\,\vec{a}_\phi$
$d\vec{S} = \pm r^2\sin\theta d\theta d\phi\,\vec{a}_r \pm r\sin\theta drd\phi\,\vec{a}_\theta \pm rdrd\theta\,\vec{a}_\phi$
$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân

e) Tích phân đường, mặt và khối :

i. Tích phân đường:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$$ =Tích phân đường của $\vec{E}$ từ *A* đến *B*.

- Ý nghĩa của tích phân này phụ thuộc tính chất của trường vecto $\vec{E}$. Ví dụ nếu $\vec{E}$ là trường lực thì tích phân cho ta công của lực.

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l}$$ =Tích phân đường của $\vec{E}$ dọc theo đường kín C.

= còn gọi là lưu số của trường $\vec{E}$ trên đường C.

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

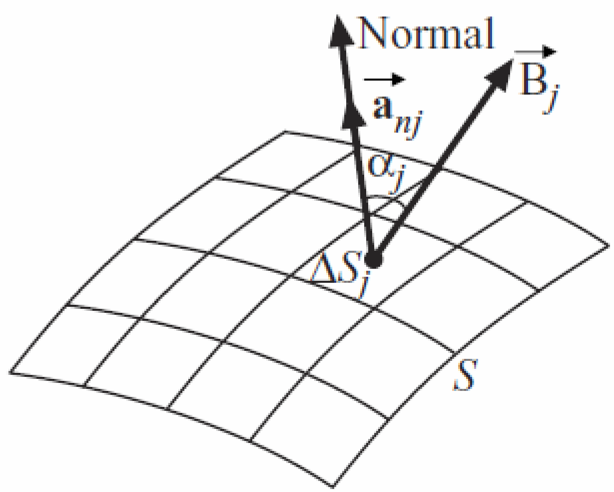
1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân

e) Tích phân đường, mặt và khối :

ii. Tích phân mặt:

- Dùng để tính thông lượng của một trường vector gửi qua mặt .

$$\psi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \ = \text{Tích phân mặt của } \vec{\mathbf{B}} \text{ trên } S.$$



$$d\vec{S} = \pm dS\vec{a}_n$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân

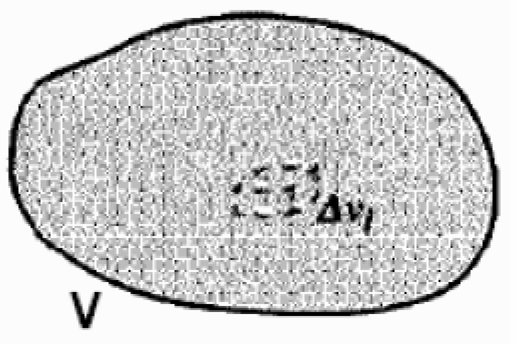
e) Tích phân đường, mặt và khối :

iii. Tích phân khối :

❖ **Định nghĩa bởi:**

$$\int_V f dV = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta V_i\to 0}} \sum_{i=1}^{N} f_i \Delta v_i$$

$$\int_V \vec{F} dV = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta V_i\to 0}} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Delta v_i$$



1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân

e) Tích phân đường, mặt và khối :

Mật độ electron bên trong khối cầu bán kính 2 m cho bởi qui luật:

$$n_e = \frac{1000}{r}\cos\frac{\phi}{4} \quad (\text{electron/m}^3)$$

Tìm điện tích của toàn bộ khối cầu biết điện tích của electron là –1,6.10^{-19} C.

- Gọi N = số electron chứa trong khối cầu, ta có :

$$N = \int_v n_e\, dv = \int_v \frac{1000}{r}\cos(\phi/4)\, dv$$

$$= \int_0^2 \frac{1000}{r} r^2\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \cos(\phi/4)\, d\phi$$

$$= 16{,}000 \text{ electrons}$$

- Điện tích khối cầu: Q =N*e = $\boxed{-2.56 \times 10^{-15} \text{ coulomb.}}$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân

	Toạ độ			**Vector đơn vị**			**Hệ số Larmor**		
	u_1	u_2	u_3	$\vec{i_1}$	$\vec{i_2}$	$\vec{i_3}$	h_1	h_2	h_3
Descartes (x,y,z)	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < z < \infty$	$\vec{i_x}$	$\vec{i_y}$	$\vec{i_z}$	1	1	1
Trụ (r,φ,z)	$0 \leq r < \infty$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	$-\infty < z < \infty$	$\vec{i_r}$	$\vec{i_\varphi}$	$\vec{i_z}$	1	r	1
Cầu (r,θ,φ)	$0 \leq r < \infty$	$0 \leq \theta < \pi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	$\vec{i_r}$	$\vec{i_\theta}$	$\vec{i_\varphi}$	1	r	$r\sin\theta$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

a) Gradient của trường vô hướng:

❖ <u>**Toán tử grad:**</u>

$$gradU \text{ or } \nabla U = \frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u_1}\vec{a}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial u_2}\vec{a}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial U}{\partial u_3}\vec{a}_3$$

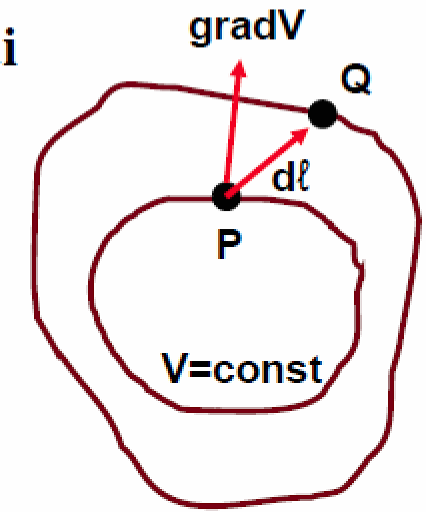
1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

❖ Các tính chất của toán tử grad:

i. Biên độ của gradV bằng tốc độ tăng cực đại của hàm V trong không gian ($dV/d\ell_{max}$).

ii. Hướng của gradV là hướng tăng cực đại của hàm V trong không gian.



iii. GradV tại điểm P sẽ vuông góc với mặt V = const tại P. Và vectơ đơn vị pháp tuyến của mặt V = const tại P xác định theo:

Vector đơn vị pháp tuyến tại P = $\pm (\text{grad}V_P) / |\text{grad}V_P|$

iv. Độ tăng của hàm V theo hướng $\vec{a}_\ell$ là hình chiếu của gradV xuống hướng đó.

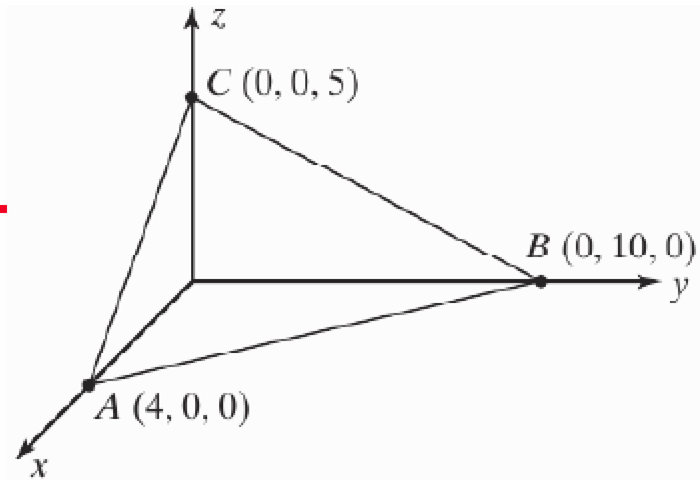
$$\frac{dV}{d\ell} = \text{grad}V.\vec{a}_\ell$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

▪

Tìm vectơ đơn vị vuông góc với mặt phẳng: 5x + 2y + 4z = 20



- **Theo công thức:**

$$\vec{a}_n = \pm \frac{\text{gradV}}{|\text{gradV}|}$$

- **Tính toán tử:**

$$\vec{a}_n = \pm \frac{5\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 4\vec{a}_z}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{5}}\left(5\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 4\vec{a}_z\right)$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

b) Divergence của trường vector :

❖Định nghĩa: Là thông lượng của trường thoát khỏi một đơn vị thể tích.

$$\operatorname{div}\vec{A} \quad \text{or} \quad \nabla \bullet \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{F}\, d\vec{s}}{\Delta V}$$

❖Công thức tính:

$$\operatorname{div}\vec{A} \quad \text{or} \quad \nabla \bullet \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \ldots\right]$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

Cho vector: $\vec{A} = x^2 z.\vec{a}_x - 2y^3 z^2.\vec{a}_y + xy^2 z.\vec{a}_z$

Tìm div$\overrightarrow{A}$, hay $\nabla \cdot \vec{A}$, tại điểm P(1, -1, 1) ?

- Theo công thức:

$$div\vec{A} = (\frac{\partial}{\partial x}(x^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3 z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 z))$$

$$= 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2$$

- Tại P(1,-1,1): $div\vec{A} = -3$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

❖ Định lý Divergence :

$$\boxed{\int_V div\,\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\,d\vec{S}}$$

($d\vec{S}$ hướng ra bên ngoài mặt S)

- **Vế phải của định lý là thông lượng của trường $\vec{A}$ gửi qua mặt kín S.**
    - **Nếu div$\vec{E}$ > 0 : thông lượng của $\vec{E}$ hướng ra bên ngoài S.**
    - **Nếu div$\vec{E}$ < 0 : thông lượng của $\vec{E}$ hướng vào bên trong S.**
    - **Nếu div$\vec{E}$ = 0 : thông lượng của $\vec{E}$ vào và ra mặt kín S là như nhau.**

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

c) Curl (rot) của trường vector :

❖**Định nghĩa: Là lưu số cực đại của trường trên một đơn vị diện tích.**

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} \quad \text{or} \quad \nabla \times \vec{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{F}\, d\vec{\ell}}{\Delta S} \right)_{\max} \vec{a}_n$$

(Chiều $\vec{a}_n$ và chiều C theo qui tắc bàn tay phải)

❖**Công thức tính:**

$$curl\,\vec{A} \ \text{ or } \ rot\,\vec{A} \ \text{ or } \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{a}_1 & h_2 \vec{a}_2 & h_3 \vec{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

Cho vector: $\vec{A} = xz^3.\vec{a}_x - 2x^2yz.\vec{a}_y + 2yz^4.\vec{a}_z$

Tìm rot$\overrightarrow{A}$, hay $\nabla \times \vec{A}$, tại điểm P(1, -1, 1) ?

- **Theo công thức:**

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= (2z^4 + 2x^2y)\vec{a}_x + (3xz^2)\vec{a}_y + (-4xyz)\vec{a}_z$$

- **Tại P(1,-1,1):** $\nabla \times \vec{A} = 3\vec{a}_y + 4\vec{a}_z$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

❖ Định lý Stokes :

$$\int_S rot\,\vec{A}\,d\vec{S} = \oint_C \vec{A}\,d\vec{l}$$

- Vế phải của định lý là lưu số của trường vector trên đường C.
- Định lý chuyển từ tích phân mặt sang tích phân đường.
- Chiều của đường kín C hợp với chiều của vector pháp tuyến $d\vec{S}$ theo qui tắc bàn tay phải.
- Toán tử rot mô tả tính chất xoáy của trường vector.
- Nếu $rot\vec{E} = 0$ ta nói trường $\vec{E}$ là trường không xoáy, hay còn gọi là trường thế.

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

d) Toán tử Laplace:

❖ Toán tử Laplace của trường vô hướng:

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = div(grad\,\varphi)$$
$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right) + \ldots\right]$$

❖ Toán tử Laplace của trường vector :

$$\Delta\vec{A} = \nabla^2\vec{A} = grad(div\,\vec{A}) - rot(rot\,\vec{A})$$

1. GIẢI TÍCH VECTƠ

1.4 Các toán tử cơ bản

e) Các định thức khác:

$$\nabla(fg) = \mathrm{grad}(f.g) = f.grad(g) + g.grad(f)$$

$$\nabla(f\vec{A}) = \mathrm{div}(f.\vec{A}) = f.\mathrm{div}(\vec{A}) + \vec{A}.\mathrm{grad}(f)$$

$$\nabla(\vec{A}\times\vec{B}) = \mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.\mathrm{rot}(\vec{A}) - \vec{A}.\mathrm{rot}(\vec{B})$$

$$\nabla\times(f\vec{A}) = \mathrm{rot}(f\vec{A}) = \mathrm{grad}(f)\times\vec{A} + f.\mathrm{rot}(\vec{A})$$

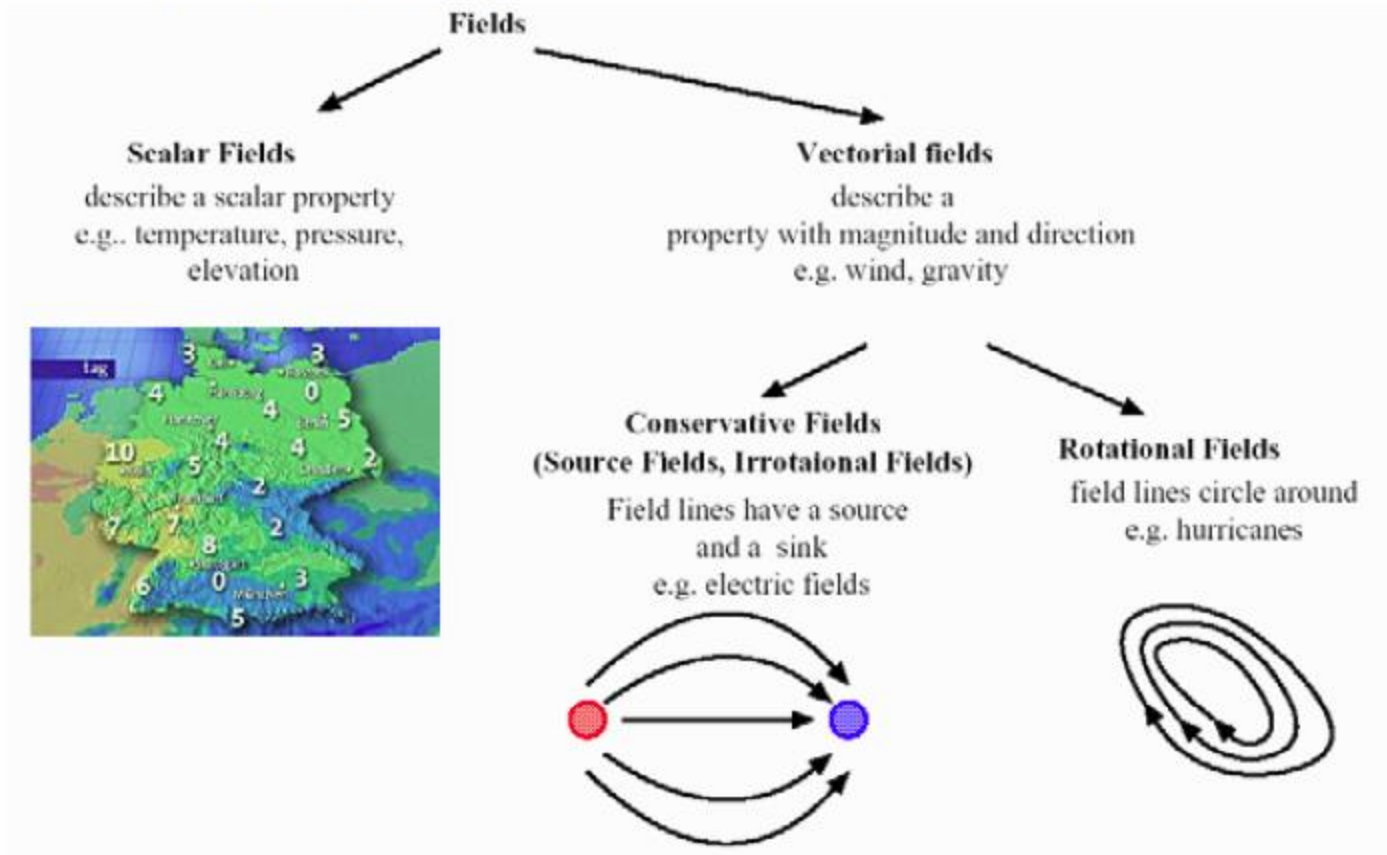
$$\nabla(\nabla\times\vec{A}) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0$$

$$\nabla\times(\nabla f) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$$

2. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

a) Khái niệm trường :

<u>Trường</u> là mô tả toán học, sự phụ thuộc vào không gian và thời gian của một đại lượng vật lý nào đó.



2. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

b) Trường điện từ :

❖ Trường điện từ: 1 dạng vật chất, tồn tại trong không gian xung quanh các vật mang điện đứng yên hay chuyển động.

❖ Trường điện & Trường từ: 2 mặt được phân chia của Trường điện từ.

❖Điện tích:
- Đứng yên -> trường điện.
- Chuyển động -> trường từ.

❖ Trường tĩnh : Trường không thay đổi theo thời gian.

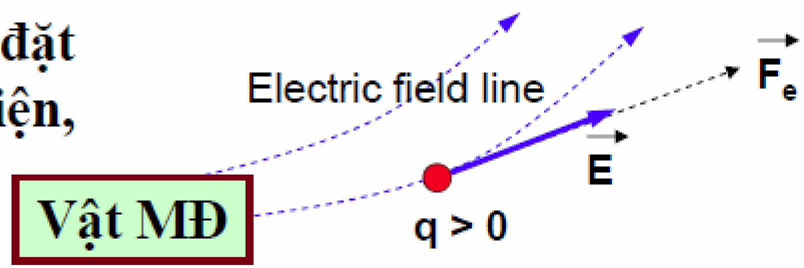
❖ Trường biến thiên: Trường thay đổi theo thời gian.

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.1 Trường điện

❖ Vector cường độ trường điện $\vec{E}$:

- Một điện tích điểm đặt bên cạnh vật mang điện, chịu tác dụng một lực .



➢ Ta nói bên cạnh vật mang điện tồn tại trường điện , xác định bởi :

- Vector cường độ trường điện = lực điện / đvị điện tích .

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}_e}{q} \quad [V/m]}$$

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.1 Trường điện

❖ Vector cảm ứng điện $\overrightarrow{D}$:

- **Môi trường chân không:** $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad [C/m^2]$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \ [F/m]$$ **= hằng số điện.**

- **Môi trường điện môi:** $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad [C/m^2]$

(Vectơ phân cực điện)

✓**Nếu điện môi đẳng hướng & tuyến tính:** $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \Longrightarrow \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ = độ thẩm điện tuyệt đối của môi trường [F/m].
ε_r = độ thẩm điện tương đối ; χ_e = độ cảm điện. Cả 2 có thứ nguyên [0].

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.1 Trường điện

Chất	ε_r	Chất	ε_r
Không khí	1,0006	Đất khô	5
Giấy	2-3	Thuỷ tinh	5-10
Cao su	2-3,5	Mica	6
Polyetylen	2,26	Sứ	6
Thạch anh nóng chảy	3,8	Đất ẩm	10
Bakelite	4,9	Nước cất	81

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.1 Trường điện

❖ Điện tích:

- Là nguồn tạo ra trường điện. Có 2 mô hình cơ bản:

i. Điện tích tập trung: được dùng khi kích thước của vật mang điện không đáng kể so với không gian khảo sát. Ký hiệu q (C).

ii. Điện tích phân bố: được dùng khi kích thước của vật mang điện là đáng kể so với không gian khảo sát, đặc trưng bởi thông số là mật độ điện tích phân bố.

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.1 Trường điện

❖Mật độ điện tích phân bố:

i. **Mật độ điện tích dài:** $\rho_\ell = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell}$ [C/m]

ii. **Mật độ điện tích mặt :** $\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$ [C/m^2]

iii. **Mật độ điện tích khối :** $\rho_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$ [C/m^3]

- **Điện tích tổng:** $Q = \int_L \rho_\ell d\ell \text{ or } \int_S \rho_S dS \text{ or } \int_V \rho_V dV \ \text{[C]}$
- **Nếu phân bố đều, mật độ điện tích không phụ thuộc tọa độ. Khi đó điện tích tổng xác định :**

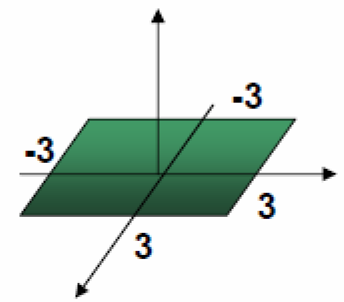
$$Q = \rho_\ell L \text{ or } \rho_S S \text{ or } \rho_V V \ \text{[C]}$$

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.1 Trường điện

Mặt vuông nằm trong mặt phẳng x-y giới hạn (-3 < x < 3) và (-3 < y < 3) mang điện với mật độ $\rho_s = 2y^2$ (μC/m²) . Tìm Q của mặt ?

Giải



- **Ta có:** $Q = \int_S \rho_S . dS_z$

$$\Rightarrow Q = \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3}(2y^2)(dxdy) = \int_{-3}^{3} dx \int_{-3}^{3}(2y^2)dy$$

$$\Rightarrow Q = 6.\frac{2}{3}[3^3 - (-3)^3] = 216\ \mu C$$

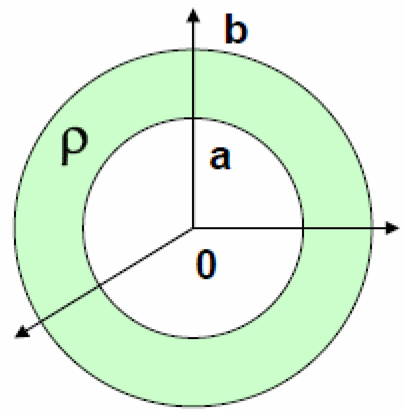
3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.1 Trường điện

-

Vỏ cầu, tâm tại gốc tọa độ, bkính trong a = 2 cm , bkính ngoài b = 3 cm, mang điện với mật độ khối $\rho_V = 6r.10^{-4}$ C/m³ . Tìm Q của vỏ cầu ?

Giải



❖**Ta có:** $Q = \int_V \rho_V.dV$

$$\Rightarrow Q = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (6r)(r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi).10^{-4}$$

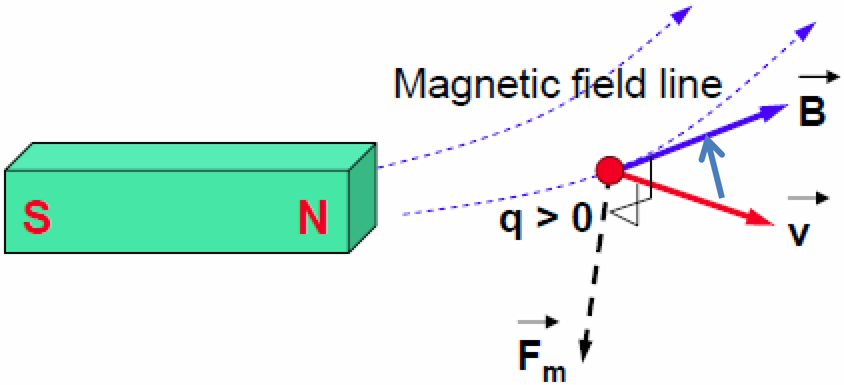
$$= \frac{6}{4}(r^4)\Big|_a^b (-\cos\theta)\Big|_0^\pi (\phi)\Big|_0^{2\pi}.10^{-4} \Rightarrow \boxed{Q = 1,225\ nC}$$

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.2 Trường từ

❖ **Vector cảm ứng từ $\vec{B}$:**

- **Điện tích điểm nếu chuyển động bên cạnh một nam châm: chịu tác dụng của một lực.**



➢ **Ta nói bên ngoài nam châm tồn tại một trường từ , đặc trưng bởi:**

- **Vector cảm ứng từ :**

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_{m(\max)} \times \vec{a}_m}{q.v} [Wb/m^2] \ or \ [T]$$

Với:
$$\begin{cases} \vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{a}_m = \text{vectơ đơn vị của } \vec{v} \text{ khi } \vec{F}_m \to (\max) \end{cases}$$

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.2 Trường từ

❖ Vector cường độ trường từ $\overrightarrow{H}$:

- Môi trường chân không: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \quad [A/m]$

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ [H/m]$ = hằng số từ.

- Môi trường từ môi: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \quad [A/m]$

(Vectơ phân cực từ)

✓ Nếu từ môi đẳng hướng và tuyến tính: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$$

$\mu = \mu_0\mu_r$ = độ thẩm từ tuyệt đối của môi trường [H/m].

μ_r = độ thẩm từ tương đối [0].

χ_m = độ cảm từ [0].

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.2 Trường từ

Chất thuận từ	χ_m	**Chất nghịch từ**	χ_m
Không khí	$3{,}6.10^{-7}$	Nitrogen	$-0{,}5.10^{-8}$
Oxygen	$2{,}1.10^{-6}$	Hydrogen	$-0{,}21.10^{-8}$
Nhôm	$2{,}3.10^{-5}$	Thuỷ ngân	$-3{,}2.10^{-5}$
Tungsten	$6{,}8.10^{-5}$	Bạc	$-2{,}6.10^{-5}$
Bạch kim	$2{,}9.10^{-4}$	Đồng	$-0{,}98.10^{-5}$
Oxygen lỏng	$3{,}5.10^{-3}$	Natri	$-0{,}24.10^{-5}$

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.2 Trường từ

❖ Dòng điện:

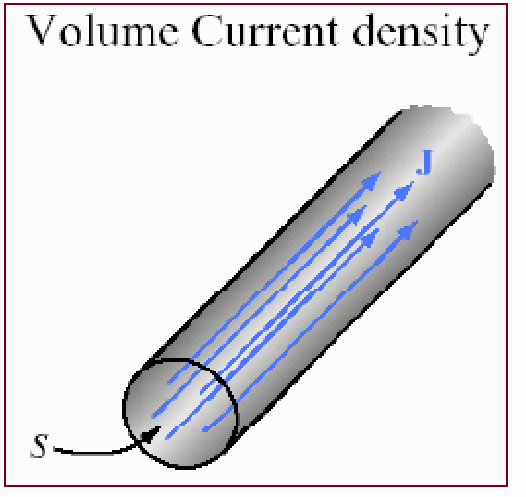
- **Định nghĩa :** $I = \dfrac{dq}{dt}$ (A)

- **Là nguồn tạo ra trường từ. Có 2 mô hình cơ bản:**

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.2 Trường từ

i. Vector mật độ dòng khối :



- Đặc điểm của vectơ mật độ dòng khối:

  + chiều trùng chiều dòng.
  + độ lớn: J = dI/dS

- Dòng điện chạy qua diện tích S : $I = \int_S \vec{J}.d\vec{S}$

❖ Định luật Ohm: $\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$

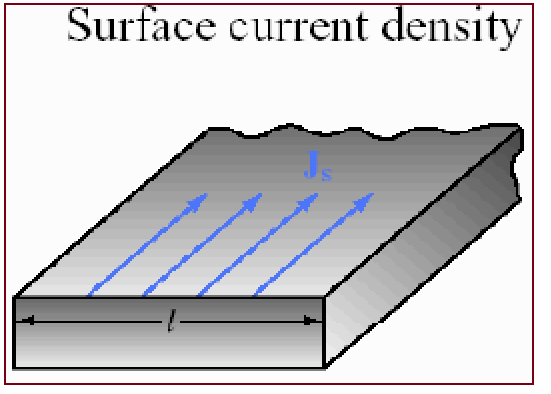
σ : Độ dẫn điện $[S/m][1/\Omega m]$

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

3.2 Trường từ

ii. Vector mật độ dòng mặt :

- Đặc điểm của vectơ mật độ dòng mặt :



$$\begin{cases} \text{+ chiều trùng chiều dòng.} \\ \text{+ độ lớn: } J_s = dI/d\ell \end{cases}$$

- Dòng điện chạy qua đường L : $I = \int_L J_s dl$

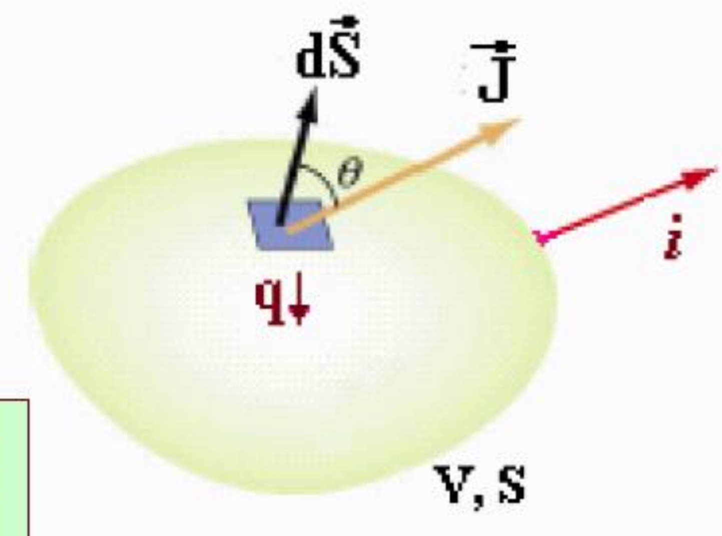
4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.1 Định luật bảo toàn điện tích

a) Phát biểu và dạng tích phân

Dòng điện thoát ra bên ngoài mặt kín S bằng tốc độ giảm của điện tích chứa bên trong mặt S.

$$i(t) = \frac{-dq}{dt}$$



$$\Rightarrow \quad i = \oint_S \vec{J}\, d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.1 Định luật bảo toàn điện tích

b) Phương trình liên tục = dạng vi phân

$$-dq/dt = i = \oint_S \vec{J}\, d\vec{S} \quad \begin{cases} -dq/dt = -\int_V \dfrac{\partial \rho_V}{\partial t} dV \\ \oint_S \vec{J}\, d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{J}\, dV \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_V div\, \vec{J}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV, \quad \forall V$$

$$\Rightarrow \boxed{div\, \vec{J} = -\partial \rho_V / \partial t}$$

(Phương trình liên tục = Dạng vi phân của luật bảo toàn điện tích)

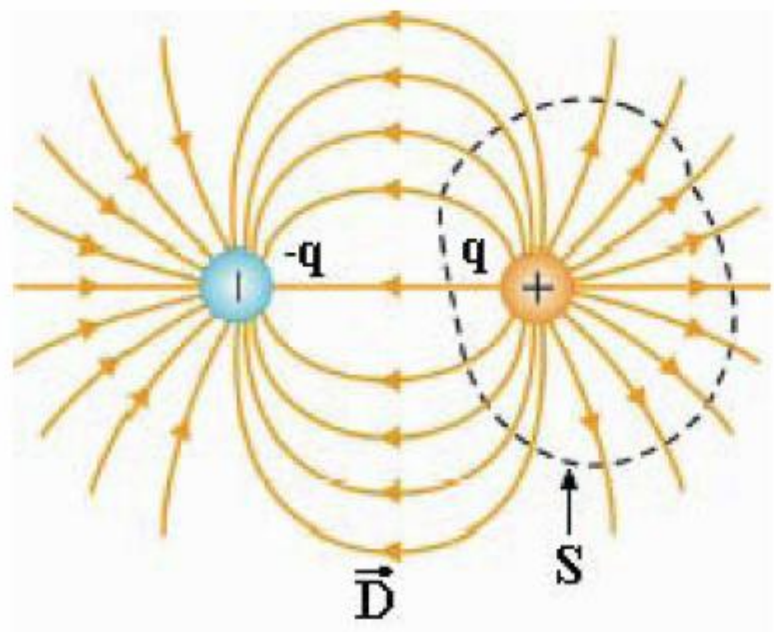
4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.2 Định luật GAUSS về điện

a) Phát biểu và dạng tích phân

Thông lượng của vector cảm ứng điện thoát ra bên ngoài mặt kín S bằng tổng điện tích chứa trong miền V giới hạn bởi mặt S đó.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q = \int_V \rho_V dV$$



4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.2 Định luật GAUSS về điện

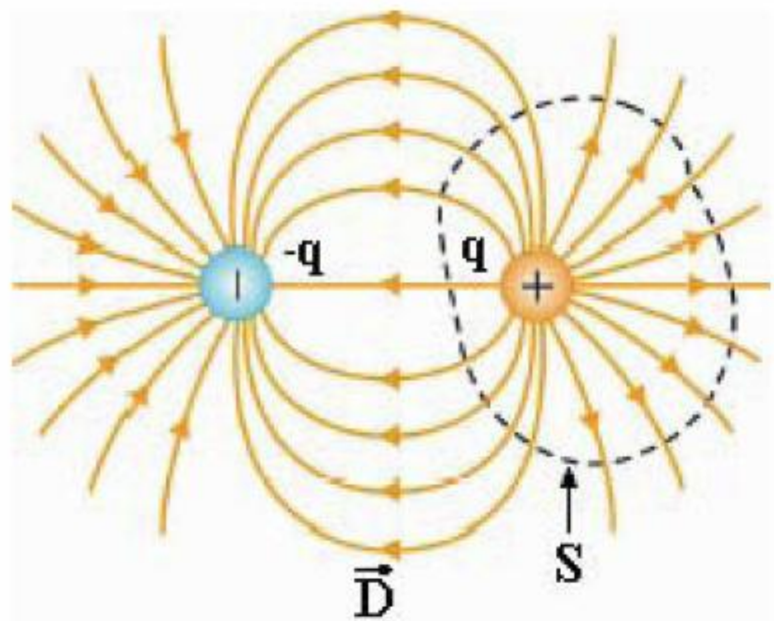
b) Dạng vi phân

-

Từ: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q = \int_V \rho_V dV$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{D} = \nabla \bullet \vec{D} = \rho_V$$

Dạng vi phân của luật Gauss về điện.



4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.2 Định luật GAUSS về điện

Áp dụng

Tìm thông lượng của vector cảm ứng điện thoát ra bên ngoài mặt S giới hạn bởi: x = ±1, y = ±1 và z = ±1, biết mật độ điện tích khối bên trong : $\rho_V(x, y, z) = \rho_0\left(3 - x^2 - y^2 - z^2\right)$

$$\oint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_V \rho_V \, dv$$

$$= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} \rho_0\left(3 - x^2 - y^2 - z^2\right) dx\, dy\, dz$$

$$= 8\rho_0 \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} \left(3 - x^2 - y^2 - z^2\right) dx\, dy\, dz$$

$$= 8\rho_0\left(3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 16\rho_0$$

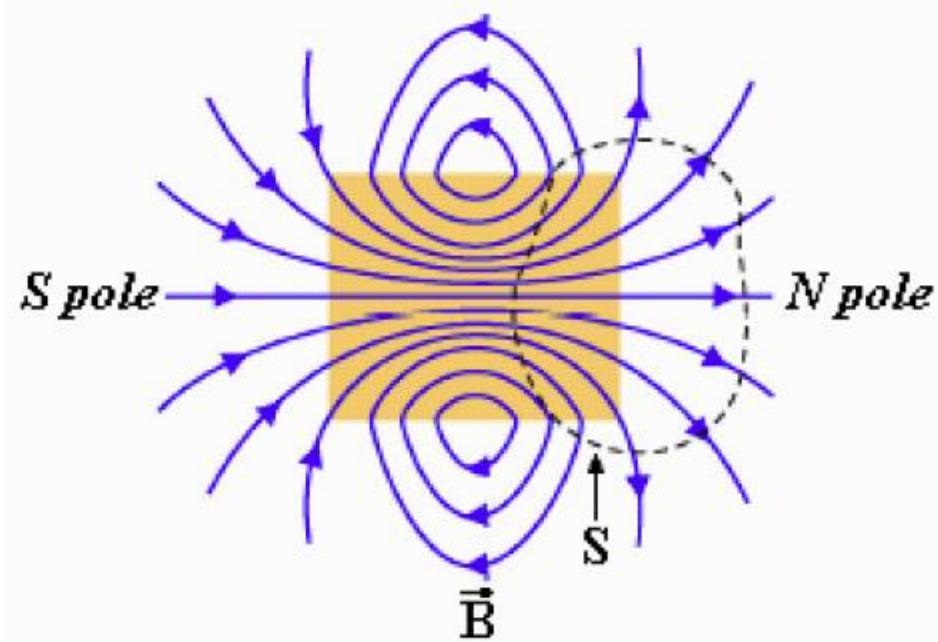
4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.3 Định luật GAUSS về từ

a) Phát biểu và dạng tích phân

Thông lượng của vector cảm ứng từ thoát ra bên ngoài mặt kín S luôn bằng 0.

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$



4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

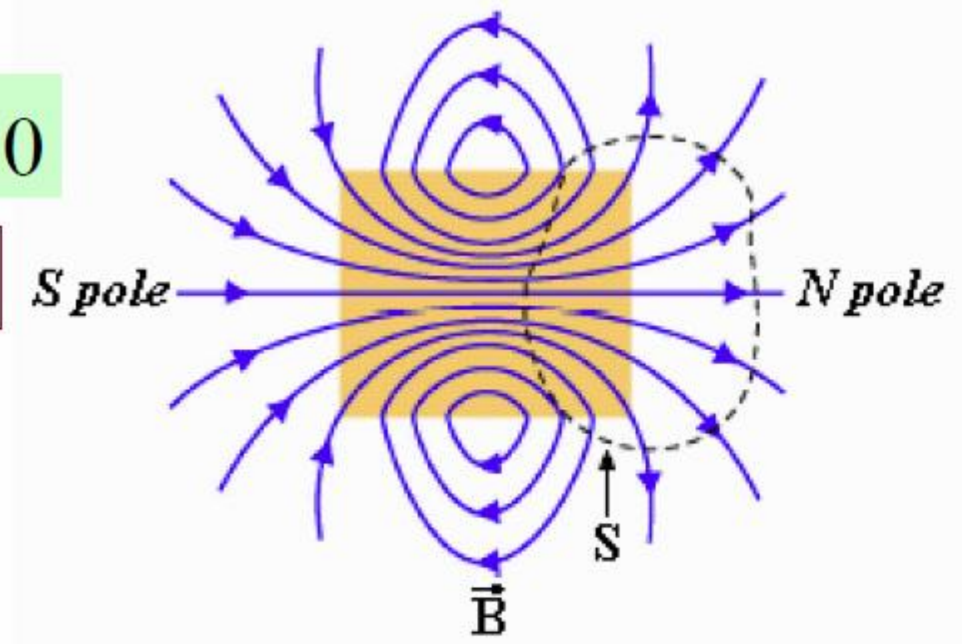
4.3 Định luật GAUSS về từ

b) Dạng vi phân

Từ: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\vec{B} = \nabla \bullet \vec{B} = 0}$$

Dạng vi phân của luật Gauss về từ.



4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

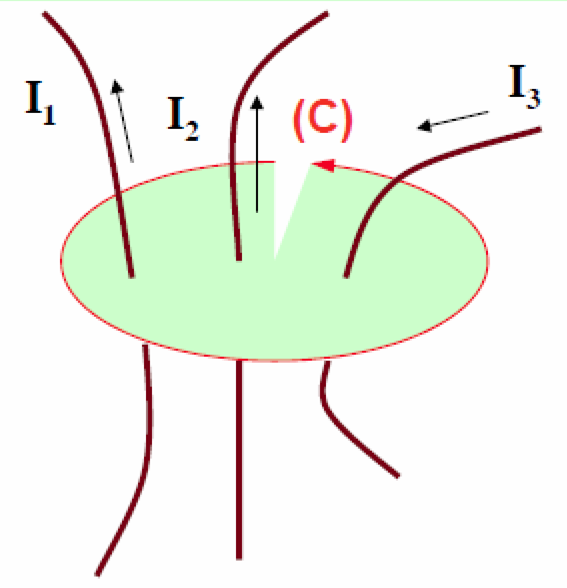
4.4 Định luật AMPERE

a) Phát biểu và dạng tích phân

- Lưu số của vector cường độ trường từ $\vec{H}$ dọc theo đường kín (C) bất kỳ bằng tổng dòng chạy qua mặt S giới hạn bởi đường kín (C) đó.

$$\boxed{\oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = I_{enc}}$$ *(Dạng tích phân)*

$$I_{enc} = \sum \pm I_k = I_1 + I_2 - I_3$$



4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.4 Định luật AMPERE

b) Dạng vi phân

Từ: $\oint_C \vec{H}d\vec{l} = I_{enc}$

- **Do :** $I_{enc} = \int_S \vec{J}.d\vec{S}$ ⇒ $\oint_C \vec{H}d\vec{l} = I_{enc} = \int_S \vec{J}d\vec{S}$

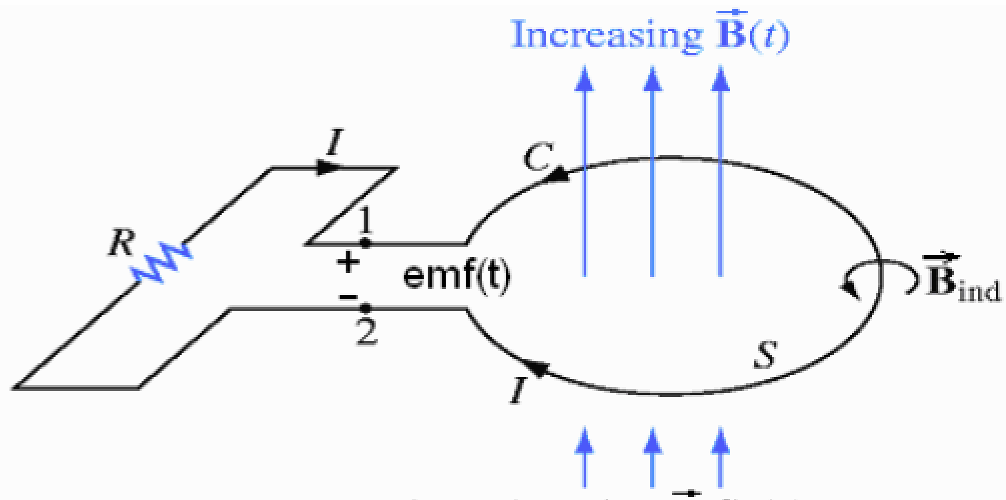
Theo định lý Stokes: $\oint_C \vec{H}\,d\,\vec{l} = \int_S rot\,\vec{H}\,d\,\vec{S}$

⇒ $\boxed{rot\,\vec{H} = \vec{J}}$ *(Dạng vi phân)*

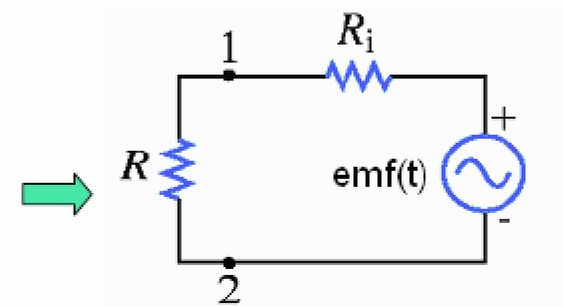
4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.4 Định luật FARADAY

a) Phát biểu và dạng tích phân



(a) Loop in a changing $\vec{B}$ field



(b) Equivalent circuit

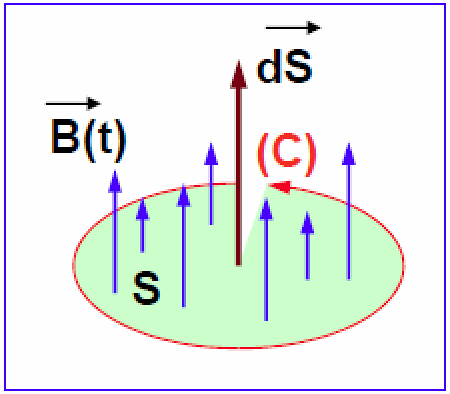
$$\text{emf} = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.4 Định luật FARADAY

b) Dạng vi phân

Từ: $$\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$



$$\ldots \quad \int_S rot\,\vec{E}\, d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \forall S$$

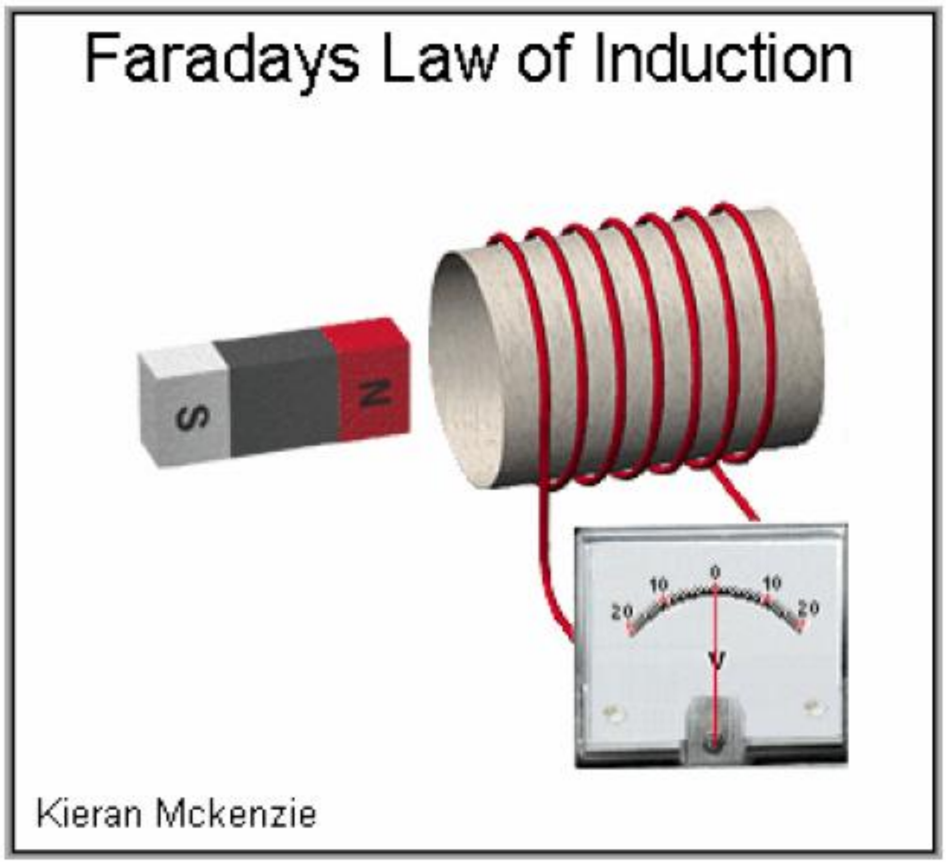
$$\boxed{rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Dạng vi phân

4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.4 Định luật FARADAY

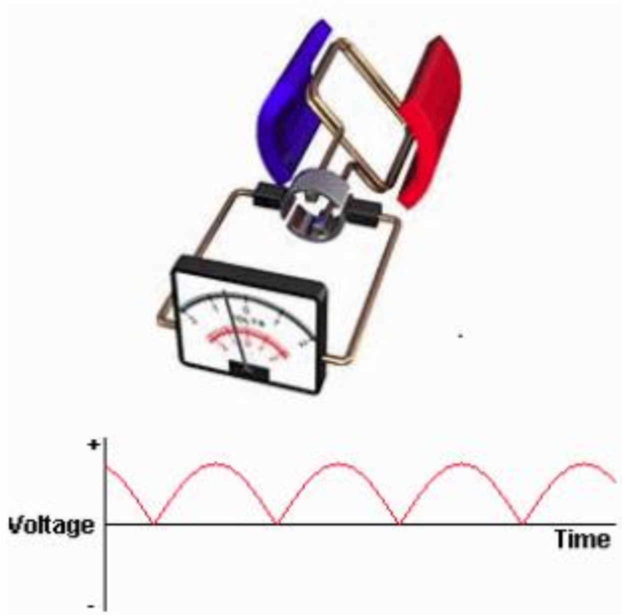
Thí nghiệm của Faraday



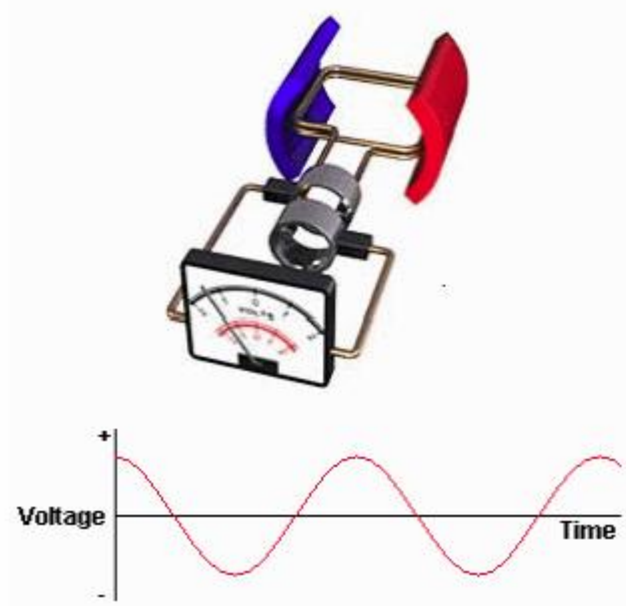
4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.4 Định luật FARADAY

Ứng dụng



Máy phát DC



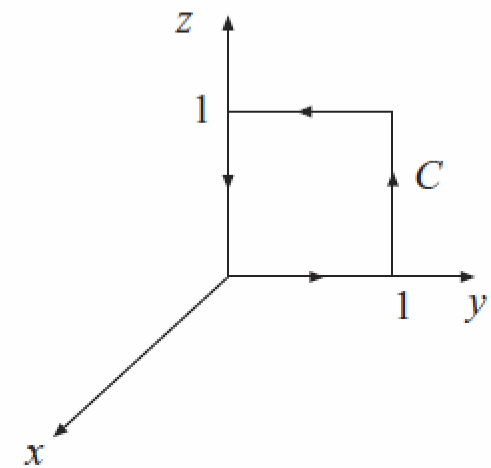
Máy phát AC

4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.4 Định luật FARADAY

Xác định EMF

Cho: $\vec{B} = B_0(\sin\omega t.\vec{a}_x - \cos\omega t.\vec{a}_y)$ **, xác định emf ?**



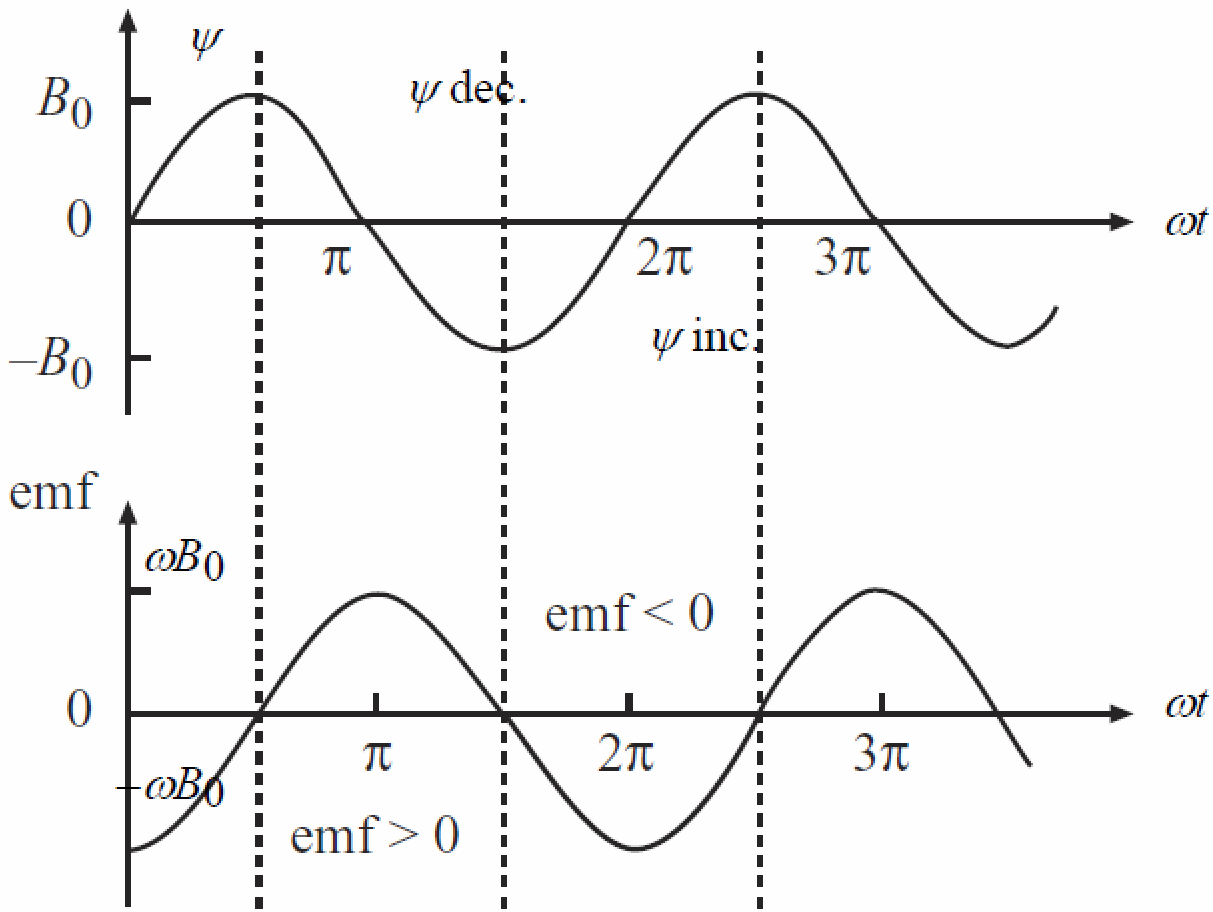
Ta có: $\int_S \vec{B}d\vec{S} = B_0 \sin\omega t$

$$emf = \oint_C \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(B_0 \sin\omega t) = -\omega B_0 \cos\omega t$$

4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.4 Định luật FARADAY

Xác định EMF



4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.4 Định luật FARADAY

Xác định EMF

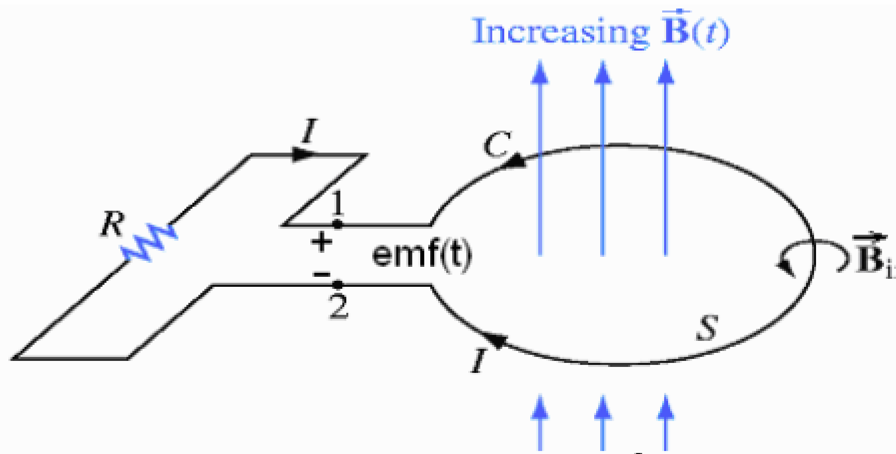
Cuộn dây N vòng tròn bán kính a, nằm trong mặt phẳng xOy, tâm tại O, nối với điện trở R, đặt trong trường từ $\vec{B} = B_o(2\vec{a}_y + 6\vec{a}_z)\sin\omega t$, ω là tần số góc, như hình vẽ bên dưới. Tìm:

a) Từ thông móc vòng qua một vòng dây ?

b) Sức điện động cảm ứng emf biết N = 10 , B_0 = 0.2T, a =10cm, ω = 10^3 rad/s ?

c) Cực tính của emf tại t = 0 ?

d) Dòng điện I trong mạch biết R = 1 kΩ ?



(a) Loop in a changing $\vec{B}$ field

4. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

4.4 Định luật FARADAY

Xác định EMF

a) Từ thông móc vòng qua một vòng dây :

$$\Phi_m = \int_S \vec{\mathbf{B}}.\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = \int_S \left[\mathrm{B}_0 \left(2\vec{\mathbf{a}}_y + 6\vec{\mathbf{a}}_z \right) \sin \omega t \right] .\vec{\mathbf{a}}_z dS = 6\pi a^2 \mathrm{B}_0 \sin \omega t$$

$$\text{b)}\ \ \text{emf} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(6\pi \mathrm{N} a^2 \mathrm{B}_0 \sin\omega t \right) = -6\pi \mathrm{N}\omega a^2 \mathrm{B}_0 \cos\omega t$$

Khi N=10, a = 0.1 m, $\omega=10^3$ rad/s and B_0 = 0.2 T: emf = $-377\cos 10^3 t$ V

c) Tại t = 0, emf = $-377\cos 10^3 t$ = - 377 volts : điểm 2 có thế cao hơn điểm 1.

d) Dòng I trong mạch là :

$$I = \frac{-\text{emf}}{R} = \frac{377}{10^3}\cos 10^3 t = 0.38\cos 10^3 t \ \text{Amps}$$

5. DÒNG ĐIỆN DỊCH- HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

5.1 Dòng điện dịch

- **Từ luật Ampere:** $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$

$\Rightarrow \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) = \mathrm{div}\,\vec{J} = -\partial\rho_V / \partial t$

Do $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) = 0$ (vector analysis)

$\Rightarrow \dfrac{\partial\rho_V}{\partial t} = 0$

- **Luật Ampere chỉ đúng với dòng điện DC !!!**

5. DÒNG ĐIỆN DỊCH- HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

5.1 Dòng điện dịch

- Từ phương trình liên tục:

$$\mathrm{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0$$

$$\boxed{\vec{J}_{total} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

- Vector mật độ dòng dẫn : $\vec{J} = \vec{J}_c \quad [A/m^2]$
- Vector mật độ dòng dịch: $\vec{J}_d = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad [A/m^2]$

5. DÒNG ĐIỆN DỊCH- HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

5.2 Định luật AMPERE - MAXWELL

$$\boxed{\oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}}$$ ***(Dạng tích phân)***

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$ ***(Dạng vi phân)***

5. DÒNG ĐIỆN DỊCH- HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

VD

Môi trường chân không ($\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) tồn tại trường từ:

$$\vec{H} = H_0 \sin(\omega t - \beta z)\vec{a}_y \ (A/m)$$

(Với β = const). Xác định: (a) Vector mật độ dòng dịch ? (b) Vector cường độ trường điện ?

Giải

a) Do $\sigma = 0$ nên:

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot}\,\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & H_0 \sin(\omega t - \beta z) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \beta H_0 \cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \ (A/m^2)$$

$$\boxed{\vec{J}_d = \beta H_0 \cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \ (A/m^2)}$$

5. DÒNG ĐIỆN DỊCH- HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

VD

Môi trường chân không ($\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) tồn tại trường từ:

$$\vec{H} = H_0 \sin(\omega t - \beta z)\vec{a}_y \ (A/m)$$

(Với β = const). Xác định: (a) Vector mật độ dòng dịch ? (b) Vector cường độ trường điện ?

Giải

b) Từ câu (a) ta có: $\vec{D} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dt = \frac{\beta H_0}{\omega} \sin(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \ (C/m^2)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\beta H_0}{\omega \varepsilon_0} \sin(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \ (V/m)}$$

5. DÒNG ĐIỆN DỊCH- HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

5.3 Hệ phương trình Maxwell

Dạng tích phân		*Dạng vi phân*
$\oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$	**(1)**	$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S}$	**(2)**	$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	**(3)**	$\text{div}\vec{D} = \rho_V$
$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	**(4)**	$\text{div}\vec{B} = 0$

Luật bảo toàn điện tích:

$\oint_S \vec{J}\, d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$	**(5)**	$div\, \vec{J} = -\partial \rho_V / \partial t$

5. DÒNG ĐIỆN DỊCH- HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

5.3 Hệ phương trình Maxwell

Môi trường chân không ($\sigma = 0, \varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$) tồn tại trường điện:

$$\vec{E}(z,t) = 5\cos(10^9 t - \beta z).\vec{a}_y \text{ (V/m)}$$

Dùng hệ phương trình Maxwell xác định β và vector cường độ trường từ ?

Giải

- **Từ pt(2) của hệ pt Maxwell:** $\text{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$-\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 5\cos(10^9 t - \beta z) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -5\beta \sin(10^9 t - \beta z)\vec{a}_x$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{-5\beta}{\mu_0 .10^9}\cos(10^9 t - \beta z)\vec{a}_x$$

5. DÒNG ĐIỆN DỊCH- HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

5.3 Hệ phương trình Maxwell

- **Từ pt(1) của hệ pt Maxwell:** $\mathrm{rot}\vec{\mathrm{H}} = \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{H}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{x}} & \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{y}} & \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{z}} \\ \partial/\partial\mathrm{x} & \partial/\partial\mathrm{y} & \partial/\partial\mathrm{z} \\ \frac{-5\beta}{\mu_0.10^9}\cos(10^9 t - \beta \mathrm{z}) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{5\beta^2}{\mu_0.10^9}\sin(10^9 t - \beta z)\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{y}}$$

Và: $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -5\varepsilon_0 10^9 \sin(10^9 t - \beta \mathrm{z})\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{y}}$ $\Rightarrow 5.\varepsilon_0.10^9 = \frac{5\beta^2}{\mu_0.10^9}$

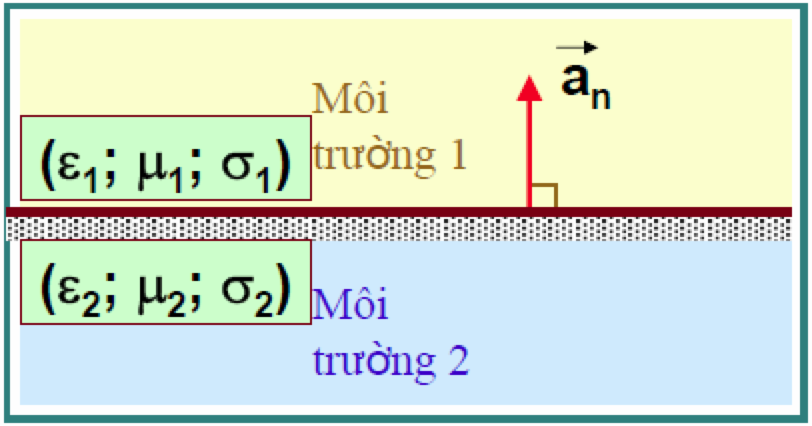
$$\Rightarrow \beta = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{H}} = \frac{-5}{120\pi}\cos(10^9 t - \beta z)\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{x}} \ \ (\mathrm{A/m})$$

6. ĐIỀU KIỆN BIÊN

6.1 Khái niệm

- ĐKB = là các phương trình toán, mô tả sự ràng buộc của các đại lượng đặc trưng của trường điện từ trên biên của hai môi trường .

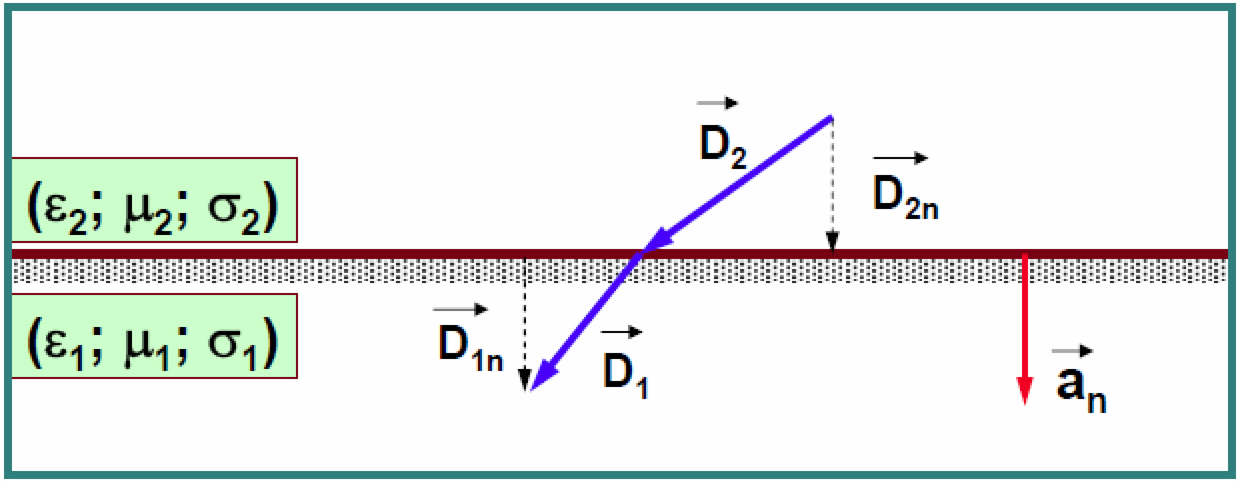


- Lưu ý là trong các bài toán điều kiện biên, vector đơn vị pháp tuyến của biên luôn chọn theo qui tắc: hướng từ môi trường 2 sang môi trường 1.

$$\vec{a}_n : 2 \rightarrow 1$$

6. ĐIỀU KIỆN BIÊN

6.2 Điều kiện biên cho thành phần pháp tuyến



$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$
$$B_{1n} - B_{2n} = 0$$
$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

$$\vec{a}_n(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$
$$\vec{a}_n(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$
$$\vec{a}_n(\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

$$(\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n}) = \rho_s.\vec{a}_n$$
$$(\vec{B}_{1n} - \vec{B}_{2n}) = 0$$
$$(\vec{J}_{1n} - \vec{J}_{2n}) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}.\vec{a}_n$$

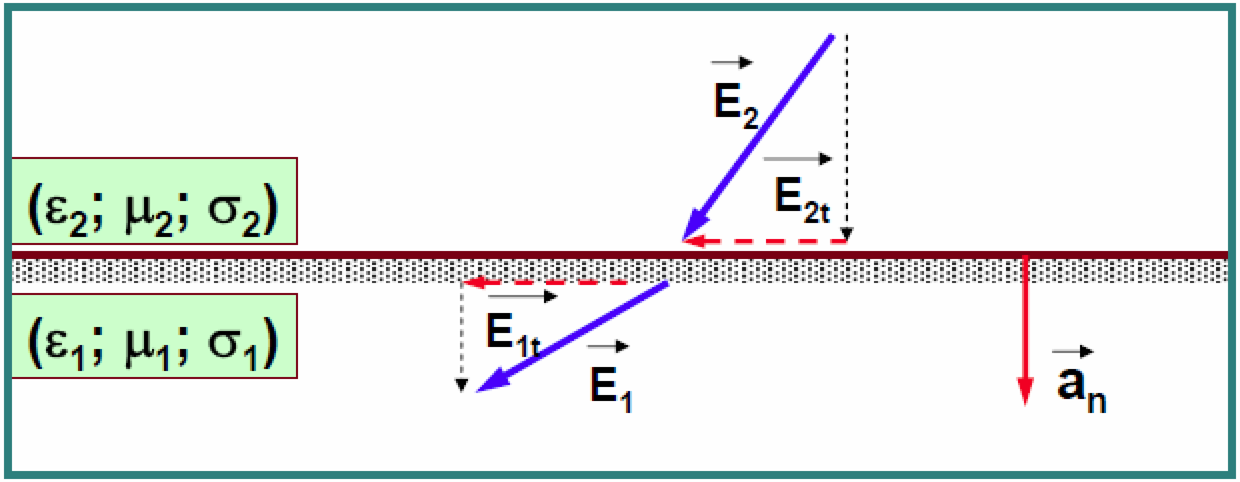
6. ĐIỀU KIỆN BIÊN

6.3 Điều kiện biên cho thành phần tiếp tuyến

$$H_{1t} - H_{2t} = J_S$$
$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

$$\vec{a}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$$
$$\vec{a}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$(\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t}) = \vec{J}_S \times \vec{a}_n$$
$$(\vec{E}_{1t} - \vec{E}_{2t}) = 0$$



6. ĐIỀU KIỆN BIÊN

6.3 Quy trình giải bài toán điều kiện biên

Giả sử biết trường điện trên biên về phía môi trường 1 ($\vec{E}_1$), xác định trường điện trên biên về phía môi trường 2 ($\vec{E}_2$).

1. **Xác định vector đơn vị pháp tuyến $\vec{a}_n$.**
2. **Xác định các thành phần pháp tuyến & tiếp tuyến của $\vec{E}_1$.**

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1n} + \vec{E}_{1t} \Leftrightarrow \vec{E}_{1n} = (\vec{E}_1.\vec{a}_n).\vec{a}_n \quad \vec{E}_{1t} = \vec{E}_1 - \vec{E}_{1n}$$

3. **Áp dụng ĐKB tìm $\vec{E}_2$.**

- **Áp dụng ĐKB thành phần pháp tuyến xác định $\vec{E}_{2n}$.**
- **Áp dụng ĐKB thành phần tiếp tuyến xác định $\vec{E}_{2t}$.**

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \vec{E}_{2n} + \vec{E}_{2t}$$

6. ĐIỀU KIỆN BIÊN

VD

Mặt phẳng z = 0 là biên của hai môi trường: môi trường 2 chiếm miền z < 0 là chân không và môi trường 1 chiếm miền z > 0 là điện môi lý tưởng có $\varepsilon_{1r} = 40$. Biết trường điện trên biên về phía môi trường chân không là : $\vec{E}_2 = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y + 50\vec{a}_z$ (V/m)

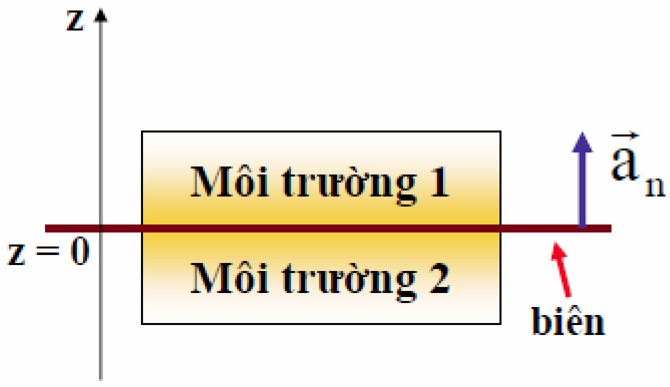
Tìm trường điện trên biên về phía môi trường điện môi ?

Giải

❖ Xác định $\vec{a}_n$:

Do vector đơn vị pháp tuyến của biên hướng từ môi trường 2 sang môi trường 1 nên ta có :

$$\vec{a}_n = \vec{a}_z$$



6. ĐIỀU KIỆN BIÊN

VD

Mặt phẳng z = 0 là biên của hai môi trường: môi trường 2 chiếm miền z < 0 là chân không và môi trường 1 chiếm miền z > 0 là điện môi lý tưởng có ε_{1r} = 40. Biết trường điện trên biên về phía môi trường chân không là : $\vec{E}_2 = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y + 50\vec{a}_z$ (V/m)

Tìm trường điện trên biên về phía môi trường điện môi ?

Giải

- **Các thành phần của** $\vec{E}_2$ **:**

$$\vec{E}_{2n} = (\vec{E}_2.\vec{a}_n).\vec{a}_n = 50\vec{a}_z$$

$$\vec{E}_{2t} = \vec{E}_2 - \vec{E}_{2n} = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y$$

6. ĐIỀU KIỆN BIÊN

VD

Mặt phẳng z = 0 là biên của hai môi trường: môi trường 2 chiếm miền z < 0 là chân không và môi trường 1 chiếm miền z > 0 là điện môi lý tưởng có ε_{1r} = 40. Biết trường điện trên biên về phía môi trường chân không là : $\vec{E}_2 = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y + 50\vec{a}_z$ (V/m)

Tìm trường điện trên biên về phía môi trường điện môi ?

Giải

- **Xác định các thành phần của $\vec{E}_1$ dùng phương trình ĐKB:**

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y$$

$$\vec{E}_{1n} = \frac{\vec{D}_{1n}}{\varepsilon_1} = \frac{\vec{D}_{2n} + \rho_S\vec{a}_n}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2\vec{E}_{2n}}{\varepsilon_1} = \frac{1.50\vec{a}_z}{40} = 1.25\vec{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y + 1.25\vec{a}_z \text{ (V/m)}$$

7. NĂNG LƯỢNG ĐIỆN TỪ- ĐỊNH LÝ POYNTING

Định lý Poynting thiết lập mối liên hệ giữa sự thay đổi năng lượng điện từ trong một thể tích V với dòng năng lượng điện từ chảy qua mặt kín S bao quanh thể tích này.

$$\vec{F} = dq\vec{E} + dq\vec{v} \times \vec{B}$$

Khi dq dịch chuyển được quãng đường , công của lực điện từ tác dụng lên dq

$$dA = \vec{F}\overrightarrow{dl} = \left(dq\vec{E} + dq\vec{v} \times \vec{B}\right)\overrightarrow{dl}$$

$\overrightarrow{dl} = \vec{v}dt$

$$dA = dq\vec{E}\overrightarrow{dl} = dq\vec{E}\vec{v}dt$$

7. NĂNG LƯỢNG ĐIỆN TỪ- ĐỊNH LÝ POYNTING

Công suất thực hiện bởi trường điện từ

$$\frac{dA}{dt} = dq\vec{E}\vec{v}$$

dq = ρdV

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \rho dV\vec{E}\vec{v}$$

$$\vec{J} = \rho\vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \vec{J}\vec{E}dV$$

Đó là công suất tiêu tán trường do tỏa nhiệt trong thể tích V

$$P_j = \int_V \vec{J}\vec{E}dV$$

Mật độ cs tiêu tán $p_j = \vec{J}\vec{E} \quad [W/m^2]$

7. NĂNG LƯỢNG ĐIỆN TỪ- ĐỊNH LÝ POYNTING

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$div\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{H} rot\vec{E} - \vec{E} rot\vec{H}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-div\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{J}\vec{E} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Vec tơ Poynting được định nghĩa $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [W/m^2]$

$$-div\vec{P} = \vec{J}\vec{E} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Định lý vector Pontying

$$-\oint_S \vec{P}\overrightarrow{ds} = \int_V \vec{J}\vec{E}\,dV + \int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV$$

7. NĂNG LƯỢNG ĐIỆN TỪ- ĐỊNH LÝ POYNTING

Vì ***E*** (V/m), ***H*** (A/m) nên ***P*** (W/m^2).

$$-\oint_S \vec{P}\,\overrightarrow{ds}$$

là công suất trường điện từ truyền qua mặt ***S*** vào trong thể tích ***V***. Do đó vector Poynting còn được gọi là vector mật độ dòng công suất.

$$-\oint_S \vec{P}\,\overrightarrow{ds} = \int_V \vec{J}\vec{E}\,dV + \int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV$$

công suất tiêu tán trường trong thể tích V

công suất ứng với sự thay đổi năng lượng điện từ tập trung trong thể tích V

7. NĂNG LƯỢNG ĐIỆN TỪ- ĐỊNH LÝ POYNTING

Công suất ứng với sự thay đổi năng lượng điện từ tập trung trong thể tích ***V***

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV$$

với ***W*** là năng lượng trường điện từ tập trung trong thể tích ***V***

$$W = \int_0^t \int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV dt \quad [J]$$

$$\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E}\frac{\partial (\varepsilon \vec{E})}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial (\varepsilon \vec{E}^2)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial (\vec{E}\vec{D})}{\partial t}$$

$$\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{H}\frac{\partial (\mu \vec{H})}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial (\mu \vec{H}^2)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial (\vec{B}\vec{H})}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\int_V (\vec{E}\vec{D})\, dV + \frac{1}{2}\int_V (\vec{B}\vec{H})\, dV \quad [J]$$

7. NĂNG LƯỢNG ĐIỆN TỪ- ĐỊNH LÝ POYNTING

Mật độ năng lượng trường điện

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$$

Mật độ năng lượng trường từ w_b lần lượt là

$$w_b = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$$